

「理工系のための基礎数学」

高木 悟・長谷川研二・熊ノ郷直人 共著

培風館 2015 年 12 月発行

補足資料

この資料は培風館の許可を得て

高木悟のウェブサイト

<http://www.ns.kogakuin.ac.jp/~ft40433/book/>

に掲載しているものである

本資料の著作権は

高木 悟・長谷川研二・熊ノ郷直人

にある

利用後は同ウェブサイト 内にあるアンケートにご協力ください

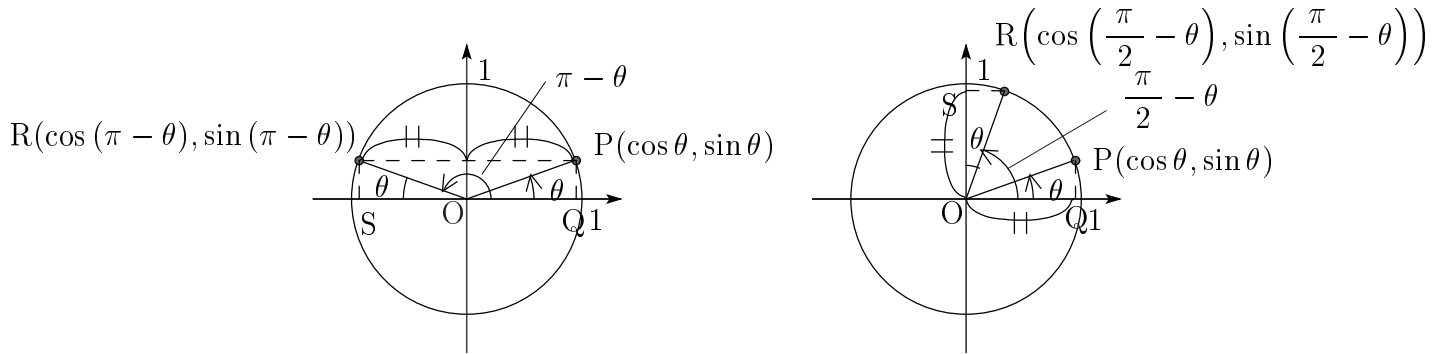
目 次

1	(p.77) $\pi - \theta, \frac{\pi}{2} - \theta$ の三角関数	3
2	(p.81) 半角の公式・積和の公式・和積の公式の導出	4
3	(p.86) 練習 6.1 の解答	6
4	(p.95) 練習 6.6 の解答	7
5	(p.101) 定理 7.1 (二項定理) の証明	8
6	(p.103) $g'(x), k'(x)$ の導出	9
7	(p.121) $g(x)$ が偶関数であること, $k(x)$ が奇関数であること, $g(x) + k(x) = f(x)$ が成 り立つことの証明	11

1 (p.77) $\pi - \theta, \frac{\pi}{2} - \theta$ の三角関数

下図より, 次の関係式が得られる (後で学習する加法定理を用いてもよい).

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \theta) &= \sin \theta \\ \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta \\ \tan(\pi - \theta) &= -\tan \theta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \frac{1}{\tan \theta}\end{aligned}$$



2つの直角三角形 OPQ と ORS は合同であるから, その関係を利用すればよい. 角 θ は適当な範囲で考え, 後で拡張すればよい.

$$\sin(\pi - \theta) = \overline{RS} = \overline{PQ} = \sin \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = \overline{OS} = -\overline{OQ} = -\cos \theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} = -\tan \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \overline{OS} = \overline{OQ} = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \overline{RS} = \overline{PQ} = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{1}{\tan \theta}$$

2 (p.81) 半角の公式・積和の公式・和積の公式の導出

加法定理を用いて、これらの公式を導いてみる.

$$\bullet \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

より $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ であるから、ここで θ に $\frac{\theta}{2}$ を代入.

$$\bullet \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2\cos^2 \theta - 1$$

より $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ であるから、ここで θ に $\frac{\theta}{2}$ を代入.

$$\bullet \sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\begin{array}{rcl} \sin(\alpha + \beta) & = & \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ +) \sin(\alpha - \beta) & = & \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \hline \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) & = & 2\sin \alpha \cos \beta \end{array}$$

より、両辺を 2 で割る.

$$\bullet \cos \alpha \sin \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\begin{array}{rcl} \sin(\alpha + \beta) & = & \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ -) \sin(\alpha - \beta) & = & \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \hline \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) & = & 2\cos \alpha \sin \beta \end{array}$$

より、両辺を 2 で割る.

$$\bullet \cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\begin{array}{rcl} \cos(\alpha + \beta) & = & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ +) \cos(\alpha - \beta) & = & \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \hline \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) & = & 2\cos \alpha \cos \beta \end{array}$$

より、両辺を 2 で割る.

$$\bullet \sin \alpha \sin \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\begin{array}{rcl} \cos(\alpha + \beta) & = & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ -) \cos(\alpha - \beta) & = & \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \hline \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) & = & -2\sin \alpha \sin \beta \end{array}$$

より、両辺を -2 で割る.

$$\bullet \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin \left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \right) = \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ +) \sin B &= \sin \left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \right) = \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\bullet \sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin \left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \right) = \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ -) \sin B &= \sin \left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \right) = \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\bullet \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos A &= \cos \left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \right) = \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ +) \cos B &= \cos \left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \right) = \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\bullet \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

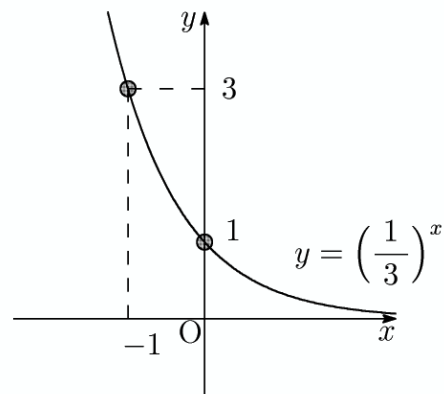
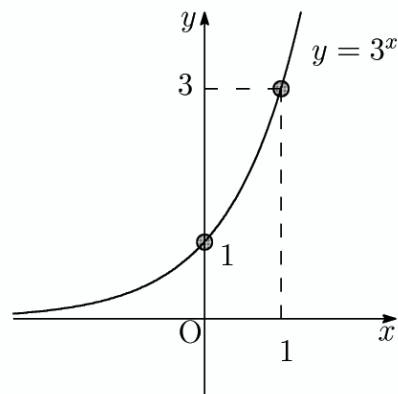
$$\begin{aligned} \cos A &= \cos \left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \right) = \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ -) \cos B &= \cos \left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \right) = \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

3 (p.86) 練習 6.1 の解答

例 6.1 (p.84) と同じようにして以下のような表を作り, この各点を xy 平面に書いて滑らかな曲線で結ぶとグラフがかける.

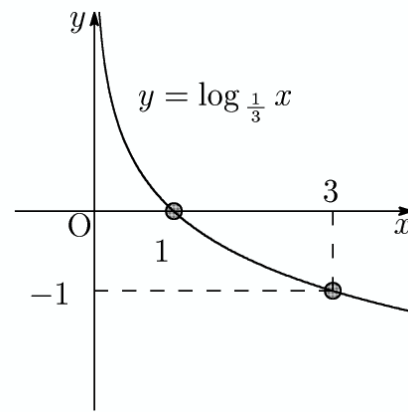
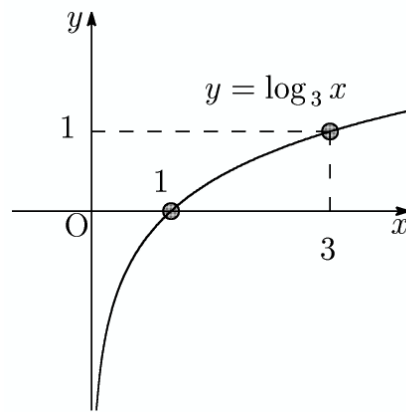
x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
3^x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	$\sqrt{3} \approx 1.7$	3	9	27
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.6$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$



4 (p.95) 練習 6.6 の解答

例 6.6 (p.94) と同じようにして以下のような表を作り, この各点を xy 平面に書いて滑らかな曲線で結ぶとグラフがかける.

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$\log_3 x$	-2	-1	0	1	2	3
$\log_{\frac{1}{3}} x$	2	1	0	-1	-2	-3



5 (p.101) 定理 7.1 (二項定理) の証明

例えば, $(x+h)^3$ を展開したときの xh^2 の係数について調べると,

$$(x+h)^3 = (x+h) \times (x+h) \times (x+h)$$

であるから, xh^2 を作るためには 3 つの $(x+h)$ から 2 つ h を選べばよいので, xh^2 の係数は

$${}_3C_2 = 3$$

となる. 実際に展開すると,

$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

であるから, xh^2 の係数は確かに 3 であることがわかる.

$$\begin{array}{c} (x+h) \times (x+h) \times (x+h) \\ \hline \begin{array}{ccccc} x & \times & h & \times & h \\ h & \times & x & \times & h \\ h & \times & h & \times & x \end{array} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} (x+h) \times (x+h) \times (x+h) \\ \hline \begin{array}{ccccc} x & \times & h & \times & h \\ h & \times & x & \times & h \\ h & \times & h & \times & x \end{array} \right\} \right\} \begin{array}{c} 3 \text{ 通り} \end{array}$$

同様に考えれば, $(x+h)^n$ を展開したときの $x^{n-r}h^r$ の係数について調べると,

$$(x+h)^n = (x+h) \times (x+h) \times \cdots \times (x+h)$$

であるから, $x^{n-r}h^r$ を作るためには n 個の $(x+h)$ から r 個 h を選べばよいので, $x^{n-r}h^r$ の係数は

$${}_nC_r$$

となる. これより, 二項定理の式が得られる.

6 (p.103) $g'(x)$, $k'(x)$ の導出

$g(x) = \frac{1}{x^n}$, $k(x) = \sqrt[n]{x}$ の導関数を定義にしたがって求めるが, その際に展開式

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

を利用する.

まず, $g(x)$ において $a = x + h$, $b = x$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n} \right) = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n} \right) \\ &= \frac{1}{a-b} \cdot \frac{b^n - a^n}{a^n b^n} = -\frac{1}{a^n b^n} \cdot \frac{a^n - b^n}{a-b} \\ &= -\frac{1}{a^n b^n} (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned}$$

である. このとき,

$$\lim_{h \rightarrow 0} a = \lim_{h \rightarrow 0} (x+h) = x, \quad \lim_{h \rightarrow 0} b = \lim_{h \rightarrow 0} x = x$$

となるので

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{a^n b^n} (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= -\frac{1}{x^n x^n} (x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \cdots + xx^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= -\frac{1}{x^{2n}} (x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}) \\ &= -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{(n+1)+(n-1)}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{n+1}x^{n-1}} = -\frac{n}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

同様に, $k(x)$ において $a = \sqrt[n]{x+h}$, $b = \sqrt[n]{x}$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} &= \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} = \frac{a - b}{a^n - b^n} \\ &= \frac{1}{a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}} \end{aligned}$$

である. このとき,

$$\lim_{h \rightarrow 0} a = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[n]{x+h} = \sqrt[n]{x}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} b = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x}$$

となるので

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{x}^{n-1} + \sqrt[n]{x}^{n-1} + \sqrt[n]{x}^{n-1} + \cdots + \sqrt[n]{x}^{n-1}} = \frac{1}{n \left(\sqrt[n]{x} \right)^{n-1}} \end{aligned}$$

7 (p.121) $g(x)$ が偶関数であること, $k(x)$ が奇関数であること, $g(x) + k(x) = f(x)$ が成り立つことの証明

$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ が偶関数であることの証明:

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x)$$

$k(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ が奇関数であることの証明:

$$k(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -k(x)$$

$g(x) + k(x) = f(x)$ が成り立つことの証明:

$$g(x) + k(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x)$$