السبت, 8، يوليو 2023

المسألة رقم 1 حدد جميع الأعداد الصحيحة المؤلفة $n > 1$ التي تحقق الخاصية التالية: إذا كانت $d_1, d_2, \ldots, d_k$ هي كل القواسم الموجبة للعدد n بحيث $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$، ومن ثم d_i يقسم العدد $d_{i+1} + d_{i+2}$ لكل $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

المسألة رقم 2 ليكن ABC مثلث حاد الزوايا بحيث $AB < AC$. لتكن Ω هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC. لتكن S هي نقطة منتصف القوس CB في Ω الذي يحوي A. العمود من A على BC يقابل BS في D ويقابل Ω مرة أخرى في $E \neq A$. المستقيم المار بالنقطة D موازياً BC يقابل المستقيم BE في L. لتكن الدائرة المحيطة بالمثلث BDL هي ω. لتكن ω تقابل Ω مرة أخرى في $P \neq B$. أثبت أن المماس لـ ω عند P يقابل المستقيم BS في نقطة تقع على المنصف الداخلي لزاوية $\angle BAC$.

المسألة رقم 3 لكل عدد صحيح $k \geqslant 2$، حدد جميع المتتابعات اللانهائية للأعداد الصحيحة الموجبة $a_1, a_2, \ldots$ التي يوجد لها دالة كثيرة الحدود P على الصورة $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1x + c_0$، حيث $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ هي أعداد صحيحة غير سالبة، بحيث

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

لكل عدد صحيح $n \geqslant 1$.

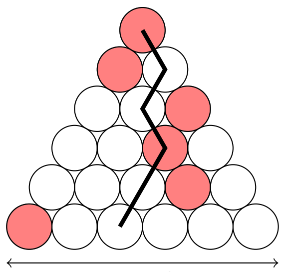
الأحد, 9. يوليو 2023

المسألة رقم 4 لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ أعداد حقيقية موجبة مختلفة مثنى مثنى بحيث

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

هو عدد صحيح لكل $n = 1, 2, \ldots, 2023$. أثبت أن $a_{2023} \geqslant 3034$.

المسألة رقم 5 ليكن n عدد صحيح موجب. يتألف المثلث الياباني من $1+2+\cdots+n$ دوائر مرتبة على شكل مثلث متطابق الأضلاع بحيث لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، يحتوي الصف i^{th} على i من الدوائر بالضبط، واحدة فقط منها ملونة بالأحمر. يتألف "مسار نينجا" في المثلث الياباني من سلسلة من n من الدوائر تم الحصول عليها بالبدء من الصف العلوي، ثم الانتقال بشكل متكرر من دائرة إلى إحدى الدائرتين الموجودتين مباشرة أسفلها والانتهاء في الصف السفلي. فيما يلي مثال للمثلث الياباني عند $n = 6$ موضح به مسار نينجا الذي يحتوي على دائرتين حمراوين.



أوجد بدلالة n أكبر عدد k بحيث في كل مثلث ياباني يوجد مسار نينجا يحتوي على الأقل k من الدوائر الحمراء.

المسألة رقم 6 ليكن ABC مثلث متطابق الأضلاع. ولتكن A_1, B_1, C_1 نقاط داخل المثلث ABC بحيث $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, و

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

ليكن BC_1 وCB_1 نتقاطعان في A_2، وليكن CA_1 وAC_1 نتقاطعان في B_2، وليكن AB_1 وBA_1 نتقاطعان في C_2. اثبت أنه إذا كان المثلث $A_1B_1C_1$ مختلف الأضلاع، فإن الدوائر المحيطة للمثلثات الثلاثة AA_1A_2, BB_1B_2 و CC_1C_2 نتقاطعان في نقطتين.