土曜日, *8. 7* 月 *2023*

問題 1.　次の条件をみたす合成数 $n > 1$ をすべて求めよ.

> n のすべての正の約数 $d_1, d_2, \dots, d_k$ を, $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ をみたすようにとったとき, 任意の $1 \leqslant i \leqslant k-2$ に対し d_i が $d_{i+1} + d_{i+2}$ を割りきる.

問題 2.　$AB < AC$ なる鋭角三角形 ABC があり, その外接円を Ω とする. 点 S を, Ω の A を含む孤 CB の中点とする. A を通り BC に垂直な直線が直線 BS と点 D で交わり, Ω と A と異なる点 E で交わる. D を通り BC と平行な直線が直線 BE と点 L で交わる. 三角形 BDL の外接円を ω とおくと, ω と Ω が B と異なる点 P で交わった. このとき, 点 P における ω の接線と直線 BS が, $\angle BAC$ の二等分線上で交わることを示せ.

問題 3.　$k \geqslant 2$ を整数とする. 正の整数からなる無限数列 $a_1, a_2, \dots$ であって, 以下の条件をみたすものをすべて求めよ.

> 非負整数 $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ を用いて $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ と表される多項式 P が存在して, 任意の整数 $n \geqslant 1$ に対して
>
> $$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$
>
> をみたす.

時間: *4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です.

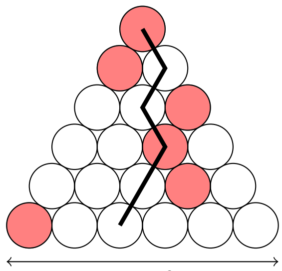
日曜日, *9. 7 月 2023*

問題 4. $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ を相異なる正の実数とする．任意の $n = 1, 2, \ldots, 2023$ に対して

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

が整数であるとき, $a_{2023} \geqslant 3034$ が成り立つことを示せ.

問題 5. n を正の整数とする．「和風三角形」とは, $1 + 2 + \cdots + n$ 個の円が正三角形状に並んでおり, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し, 上から i 段目に並んだ i 個の円のうちちょうど 1 つが赤く塗られているようなものを指す．また, 和風三角形における「忍者小路」とは, 一番上の段にある円から出発し, 今いる円のすぐ下に隣り合う 2 つの円のいずれかに移ることを繰り返し, 一番下の段にたどり着くまでに通った n 個の円として得られる列とする．以下の図は $n = 6$ における和風三角形と 2 つの赤い円を含む忍者小路の例である.



このとき, どのような和風三角形に対しても, 少なくとも k 個の赤い円を含む忍者小路が存在するような k としてありうる最大の値を n を用いて表せ.

問題 6. 正三角形 ABC の内部に, 3 点 A_1, B_1, C_1 があり, $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ および

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480°$$

をみたしている．直線 BC_1 と CB_1 の交点を A_2, 直線 CA_1 と AC_1 の交点を B_2, 直線 AB_1 と BA_1 の交点を C_2 とする．三角形 $A_1B_1C_1$ が不等辺三角形であるとき, 三角形 AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 の外接円すべてがある共通する 2 点を通ることを示せ.

(備考：不等辺三角形とは, どの二辺の長さも異なる三角形のことである.)